

**LATERAL FORCES  
AT THE  
ROLLING PNEUMATIC TIRE**

**EDC Library Ref. No. 1011**

DISCLAIMER

These materials are available in the public domain and are not copyrighted. Engineering Dynamics Corporation (EDC) copies and distributes these materials to provide a source of information to the accident investigation community. EDC makes no claims as to their accuracy and assume no liability for the contents or use thereof.

~~100-400-10~~

29034

## LATERAL FORCES AT THE ROLLING PNEUMATIC TIRE

by E. Fiala, Vienna

~~29034~~

19. 1. 1952. 100% of the plants were infested with *Thrips palmi*. The infestation was more severe than in the previous year.

Z. VIII 96:973-979 (Oct., 1954)

1. *Leucosia* *leucostoma* *Leucosia* *leucostoma* *Leucosia* *leucostoma* *Leucosia* *leucostoma*

卷之三

1996-07-10

Chancery Lists of Wills

1996-1997 学年第一学期期中考试卷

1963-1964  
1964-1965  
1965-1966  
1966-1967  
1967-1968  
1968-1969  
1969-1970  
1970-1971  
1971-1972  
1972-1973  
1973-1974  
1974-1975  
1975-1976  
1976-1977  
1977-1978  
1978-1979  
1979-1980  
1980-1981  
1981-1982  
1982-1983  
1983-1984  
1984-1985  
1985-1986  
1986-1987  
1987-1988  
1988-1989  
1989-1990  
1990-1991  
1991-1992  
1992-1993  
1993-1994  
1994-1995  
1995-1996  
1996-1997  
1997-1998  
1998-1999  
1999-2000  
2000-2001  
2001-2002  
2002-2003  
2003-2004  
2004-2005  
2005-2006  
2006-2007  
2007-2008  
2008-2009  
2009-2010  
2010-2011  
2011-2012  
2012-2013  
2013-2014  
2014-2015  
2015-2016  
2016-2017  
2017-2018  
2018-2019  
2019-2020  
2020-2021  
2021-2022  
2022-2023  
2023-2024  
2024-2025  
2025-2026  
2026-2027  
2027-2028  
2028-2029  
2029-2030  
2030-2031  
2031-2032  
2032-2033  
2033-2034  
2034-2035  
2035-2036  
2036-2037  
2037-2038  
2038-2039  
2039-2040  
2040-2041  
2041-2042  
2042-2043  
2043-2044  
2044-2045  
2045-2046  
2046-2047  
2047-2048  
2048-2049  
2049-2050  
2050-2051  
2051-2052  
2052-2053  
2053-2054  
2054-2055  
2055-2056  
2056-2057  
2057-2058  
2058-2059  
2059-2060  
2060-2061  
2061-2062  
2062-2063  
2063-2064  
2064-2065  
2065-2066  
2066-2067  
2067-2068  
2068-2069  
2069-2070  
2070-2071  
2071-2072  
2072-2073  
2073-2074  
2074-2075  
2075-2076  
2076-2077  
2077-2078  
2078-2079  
2079-2080  
2080-2081  
2081-2082  
2082-2083  
2083-2084  
2084-2085  
2085-2086  
2086-2087  
2087-2088  
2088-2089  
2089-2090  
2090-2091  
2091-2092  
2092-2093  
2093-2094  
2094-2095  
2095-2096  
2096-2097  
2097-2098  
2098-2099  
2099-20100

<sup>1</sup> See also the discussion of the relationship between the two in the section on "Theoretical Implications."

WYOMING STATE

by the Sec

# Highway Safety

Translated for The Ford Motor Company,  
Engineering Staff Library  
by The Technical Library Research Service  
Under Reference No. 8753

## LATERAL FORCES AT THE ROLLING PNEUMATIC TIRE

by E. Piala, Vienna<sup>1</sup>

The numerous test results on hand on the behavior of a pneumatic tire in rubber-wheeled vehicles and on the influence of lateral and circumferential forces on wheel deformations can be represented by theoretically established equations. Theoretical assumptions are based on a substitute model of the stress distribution at the plane of contact between tire and ground plane. With an assumption of a parabolic distribution of compression stresses over the longitudinal axis of the point of contact, the wheel deformations follow from the equations of force by forces which attack perpendicular to the ground plane, in the direction of the wheel circumference and transverse to the wheel plane. This also permits an explanation of the oblique movement of the wheel under the influence of lateral forces. Approximation equations serve for the calculation of cases which appear most frequently and which will be explained on hand of numerical examples.

Denotations and Fundamental Equations

Let a rubber-tired wheel contact the ground plane in an arbitrary location and let it move along a curve, Fig. 1. Let the force  $R$  attack at the wheel center  $N$  and let the

origin of a rectangular coordinate system, the z-direction of which follows a course normal to the ground plane and the y-axis of which is located in a plane which is determined by the z-axis and by the axis of the wheel, be also located there. The line of attack of force R not necessarily intersects the plane of contact of the tire with the ground, the "footing", so that a moment  $M_p$  must still be present in order to produce an equilibrium. The wheel axis forms the angle  $\gamma$  (angle of camber) with the ground plane and the y-axis respectively and the tangent to the curve of travel forms the angle  $\phi$  (oblique angle) with the x-direction.

If R in Fig. 1 is divided into the components B, S and N in the direction of the x, y and z axes, then the following holds true if  $\beta_B$ ,  $\beta_S$  and  $\beta_N$  are the corresponding angles between the force components and R:

$$B = R \cos \beta_B \quad (1a)$$

$$S = R \cos \beta_S \quad (1b)$$

$$N = R \cos \beta_N \quad (1c)$$

$$R = \sqrt{N^2 + S^2 + B^2} \quad (1d)$$

In addition we have the denotations:

A plane perpendicular to the wheel axis through the wheel center as the wheel center plane;

An axis through the wheel center normal to the plane determined by the wheel axis and the x-axis as the steering axis, and

The section on the steering <sup>axis</sup> between the wheel center and the point of intersection through the ground plane as one half the circumference  $r_a$ .

With  $x_B$  and  $x_S$  as the distance of the point of attack of N and S, respectively, from the y axis as well as  $y_B$  and  $y_S$  as the distance of the point of attack of B and N, respectively, in the projection in Fig. 1 to the ground plane, the moment around the wheel axis results as the braking moment (moment of propulsion)  $M_B$ :

$$M_B = B (r_a - y_B \sin \delta) - N x_B \quad (2)$$

the moment around the z-axis as the moment of camber  $M_S$ :

$$M_S = N (r_a \sin \delta - y_S) + S r_a \cos \delta \quad (3)$$

and as the steering moment  $K_1$  as the moment around the steering <sup>axis</sup>:

$$K_1 = B y_B \cos \delta + S x_S \quad (4)$$

The relations between the forces N and S and the oblique angle  $\beta$ , the angle of camber  $\delta$  as well as the radius of curvature  $\rho$  of the curve of the path will be established in the following.

#### Structure of the Tire and Its Model

The tire utilized in vehicle production today essentially consists of two materials with fairly different properties, namely of the carcass which consists of cotton or synthetic fibers and which forms the skeleton of the tire,

and the rubber which serves as a binder and as the running surface. Furthermore, steel wires are imbedded in the tire bead which guarantee an assured seating of the tire on the rim, Fig. 2. Airplane tires differ from automobile tires by a considerably thinner wall thickness, since the mileage need not be as large and the requirements for a lesser tire weight are greater than in the case of motor vehicles.

Deformations of a tire are now studied on a suitable model instead of on a tire, Figs. 3 and 4. This model consists of a fixed shaft a, the guides b (which prevent shifting of the wheel circumference in the direction of circumference with respect to the shaft), the springs c (which exert proportional forces to displacement of the wheel circumference from the equilibrium position into the other two directions), the thin band d (with a finite moment of resistance around the radius), and the running band e with the running surface which yields to tangential thrust. The substitution model has a width l.

It will be investigated first which parts of the model correspond to the parts of a pneumatic tire. The shaft a is very inflexible with respect to the tire and can therefore be considered fixed. The guides b correspond to the side-walls of the tire. On account of the diagonally imbedded cord fibers, the side walls can be subjected only to very small thrust deformations in the direction of circumference. The springs c effect that compression results in an increasing force. The lateral force transmitted from band d to the shaft is proportionally equal to a displacement in the

$y$ -direction for average values (see Fig. 1) (1). The flexible band  $d$  corresponds to the cord imbedment in the tire crown and the running surface  $e$  of the model corresponds to the running surface of a true tire. A considerable difference between tire and model consists in the fact that the plane of contact is oval-shaped in the former and rectangular in the latter case. Consequently, no thrust stresses in the  $y$ -direction occur in the model.

#### Distribution of Stresses in the Contact Plane

With an assumption of identical materials for wheel and ground plane, no thrust stresses occur during rolling provided that circumferential forces are equal to zero. As shown by G. Heinrich (2, 3) thrust stresses occurring in the case of free rolling ( $M_b = 0$ ) do not change H. Hertz' thrust stress distribution. But if the wheel and the ground plane have different elastic constants, then thrust stresses of equal magnitude but opposite directions occur during free rolling (4). No investigations have yet been made in which manner the stress distribution changes under the influence of circumferential forces. The measurements of H. Martin (4) justify the approximation of the true thrust stress distribution over the length of the plane of contact by a quadratic parabola and the true tangential stress distribution by a cubic parabola, Figs. 5 and 6.

#### Deformation of the Tire by Lateral Forces

During transfer of a lateral force from the ground plane to the wheel rim the following parts of the tire and

the model respectively are stressed:

1. The running surface of  $\epsilon$  (See Figs. 3 and 4) transmits lateral forces which are proportionally equal to the displacement of the corresponding point of contact with respect to Band d at each point.

2. The band d is stressed within local limits by the ground force. The deformation is counteracted by the moment of resistance of band d and by the lateral bearing pressure of springs c.

#### Deformation of the Running Surface.

A tire element of length  $\delta x$  in the x-direction and width l transfers a lateral force  $dS$  during its deformation by the distance  $y_0$  in the y-direction as follows:

$$\text{angle of tilt } \delta\theta = L (G y_0 / d) \delta x \quad (5)$$

The value of  $G$  if  $G = E/2(1 + \mu)$  denotes the modulus of rigidity with  $E$  as the modulus of elasticity and  $\mu$  as Poisson's number as well as  $d$  as the thickness of the sliding plane, Fig. 7.

#### Deformation of Band d (Carcass Respectively).

The band d is considered as a long beam which is slightly curved perpendicular to the plane of moments and which is locally stressed but supported along its entire length. According to J. Rotta (1), the supporting force for small displacements is proportionally equal to displacements of the band against the rim so that the band can be treated as a beam on an elastic support. The lateral supporting

effect is therein expressed by the K. Girkmann (5) ground constant which represents and establishes which force per unit of length counteracts a compression.

The equation of the elastic line of band d, according to K. Girkmann (5), is denoted by the following, if S is assumed as a point load effective in the y-direction in the coordinate origin (see Fig. 1) and if  $\bar{y}_{band}$  is the corresponding band deflection:

$$\bar{y}_{band} = -(\alpha S/2k) e^{-\alpha \bar{x}} (\cos \alpha \bar{x} + \sin \alpha \bar{x}) \quad (6)$$

where k denotes the ground constant and  $\alpha$  with E as the modulus of elasticity as well as J as the moment of inertia of the band d (referred to its radius), denotes the expression  $\alpha' = \sqrt{k/EJ}$ . The lines over  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  shall denote that the origin of the coordinates is located in the center of the plane of contact.

The expansion of the potential series of Equ. 6 results in the following by neglecting the terms of the third and higher orders for small x-values.

$$\bar{y}_{band} = -(\alpha S/2k) (1 - x^2/2) \quad (6a)$$

#### Lateral Force and Angle of Oblique Motion

It is known that the pneumatic tire does not rotate perpendicular to the axis of rotation. A frequent cause for this phenomenon, i.e. oblique motion, is a lateral force. The relation of the lateral force to the angle of oblique motion has been defined experimentally several times<sup>2</sup>, but

it has not yet been possible to give comparable values for various tires.

The formation of the angle of oblique motion due to a lateral force can be explained with the tire model. Band  $\delta$  (see Figs. 3 and 4) has been deformed laterally in the vicinity of the point of contact, Curve II, Fig. 6. Each point of the running surface which is elastically connected with the band, follows the path of the band as long as no force is exerted upon it. Each point of the running surface is subjected to a displacement in the  $y$ -direction after contact with the ground (point A in Fig. 8) in contrast to the band which increases until the limit of adhesion (point B) is exceeded. The thrust deformation from this point on is only a function of the local adhesion value  $f_p$  (with  $f$  as the coefficient of friction and  $p$  as the local pressure and must therefore decrease more and more in the direction of the edge and return to zero after removal from the ground (point C). The coefficient of adhesion of the entire tire amounts to

$$1 \int f_p ds = f N \quad (6b)$$

when  $s$  is the total length of the plane of contact (see Fig. 8).

The magnitude of the angle of oblique motion and the relation with the lateral force  $S$  can be estimated by means of the model and with simple assumptions for the stress distribution at the plane of contact. For this purpose let us assume that the pressure  $p$  is distributed over the plane of contact according to a parabola

$$p = 4 p_m \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right) \quad (7)$$

(see Fig. 5), when  $p_m$  represents the greatest pressure at the plane of contact of total length  $s$  and if the origin of the coordinate system is transferred to point A (see Fig. 8).

According to H. Martin's (4) measurements the maximum values of the contact pressure actually form a ratio with the mean value of about 1.5:1 which is similar to the case of the parabola with its origin of coordinates at A. The thrust stresses due to flattening of the tire crown will be neglected.

The maximum available local adhesion force per unit of area is given at each point of contact of the running band of width 1 by the following

$$f_p = 4 f_{p_m} \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right) \quad (8)$$

With  $c_0$  as the proportionality factor, the optimum displacement  $x_m$  (see Fig. 8) can be set approximately equal to the local adhesion coefficient  $p$  according to

$$f_p l = c_0 x_m \quad (9)$$

Therefore, we have

$$x_m = f_p l / c_0 \quad (10)$$

The factor  $c_0$  thereby becomes also a measure for the ratio of the local lateral force per unit of area with the displacement and therefore corresponds to the torsion modulus  $G$  in Equ. 5.

The magnitude of the lateral displacement  $y$  of an adhering point in contrast to the corresponding point of the band is determined by the angle of oblique motion  $\beta$ , the distance from the ground-contact point A (therefore by  $x$ ) and by the deformation of the band according to Equ. 6a. If one also refers Equ. 6a to the ground-contact point A, then it is transformed with the abbreviation

$$\alpha' = \alpha^3 s^2 c_0 / 2k \quad (11)$$

into

$$y_{band} = \frac{\alpha' s}{c_0 s} \left( 1 - \frac{x}{s} \right) \quad (12)$$

A point of the running surface is subjected to an increasing displacement after contact at A in contrast to the corresponding band point until the local lateral force  $c_0 y$  per unit of area has become equal to the local adhesion coefficient  $f_p$  (point B).

The following holds true for points of the running surface in the adhesion zone (index h) which originally had been located under the center of the band (curve II), along the distance  $\overline{AB}$  of Curve III (see Fig. 8)

$$y_h = x \tan \beta \quad (13)$$

In the zone of slippage (index r) which covers the distance between B and C on Curve III, we have according to Fig. 8

$$y_r = y_{band} + y_m \quad (14)$$

and with  $y_1$  and respectively according to Equ. 12 and  $y_2$  according to Equs. 8 and 9, we have

$$J_r = \left( \frac{4 f p_m l}{c_0} + \frac{\chi s}{c_0} \right) \frac{x}{s} \left( 1 - \frac{x}{s} \right) \quad (15)$$

At the instant of removal (point C) the local values of the adhesion and lateral force are finally equal to zero, i.e. the points of contact again are located under the corresponding band points (Curves II and III coincide).

The lateral force exerted is proportionally equal to the distances AE and EC of Fig. 8 as well as to the area defined by Curve II. The following holds true

$$\begin{aligned} s &= c_0 \int_{s_h}^{s_b} \left[ x \operatorname{tg} \beta - \frac{\chi s}{c_0} \frac{x}{s} \left( 1 - \frac{x}{s} \right) \right] dx + \\ &\quad + 1 \int_{s_h}^s 4 f p_m \frac{x}{s} \left( 1 - \frac{x}{s} \right) dx \end{aligned} \quad (16)$$

For the coordinates  $x_1 = s_h$  and  $y_1$  of point B (see Fig. 8) at which slippage starts, it follows from Equs. 13 and 15

$$s_h = s - \frac{c_0 s^2 \operatorname{tg} \beta}{4 f p_m l + \chi s} \quad (16a)$$

resp.  $J_1 = s_h \tan \beta$

The evaluation of Equ. 16 results in

$$S = \frac{i}{1 + (\kappa s/6)} \left[ \frac{c_0 s^2}{2} \tan \beta - \frac{c_0^2 s^3}{A} \tan^2 \beta (2 f p_m l - \right. \\ \left. + \frac{2s}{2}) + \frac{c_0^3 s^4}{B} \tan^3 \beta \left( 2 f p_m l + \frac{s}{2} \right) \right] \quad (17)$$

$$\text{with } A = 16 f^2 p_m^2 l^2 + 8 f p_m l \kappa s + \kappa^2 s^2$$

$$\text{and } B = 3 (4 f p_m l + \kappa s) A.$$

The determination of the lateral force S from Eqn. 17 is possible only by experimentation. We thus introduce an approximation equation

$$S = \frac{c_1 s^2}{2} \tan \beta - \frac{i c_1^2 s^3}{8 f p_m l} \tan^2 \beta + \\ + \frac{i c_1^3 s^4}{96 f^2 p_m^2 l^2} \tan^3 \beta \quad (18)$$

with

$$c_1 = \frac{c_0}{1 + (\kappa s/6)} \quad (19)$$

which gives values for S and  $dS/d\beta$  for  $\beta = 0$  as well as values for S,  $dS/d\beta$  and  $d^2S/d\beta^2$  which are identical to those given by Eqn. 17 for the maximum value  $\beta = \beta_{\max}$  of the angle of oblique motion.

### Calculation Aids

The lateral force can be calculated from the angle  $\beta$  only with great difficulty even with Equ. 18. Small differences in large numbers occur mainly. Therefore, a calculation aid is given in the following which permits a fast and accurate plotting of curves for the function  $S = f(\beta)$ .

If one considers according to

$$\tan \beta = a_i (f p_m l/c_i s) \quad (20)$$

the arbitrarily chosen auxiliary value  $a_i$  as the variable in place of  $\beta$  in which the index  $i$  indicates that  $a_i = 1, 2, 3, \dots$  should be substituted during evaluation, then we immediately obtain from Equ. 18

$$S = 1/s f p_m \left( \frac{a_i}{2} - \frac{a_i^2}{8} + \frac{a_i^3}{96} \right) \quad (20a)$$

and

$$\frac{dS}{da_i} = 1/s f p_m \left( \frac{1}{2} - \frac{a_i}{4} + \frac{a_i^2}{32} \right) \quad (20b)$$

Equs. 20a and 20b have been evaluated in Table 1 and Fig. 9; where

$$\tan \beta = \frac{1}{1/s f p_m} \frac{dS}{da_i} \quad (20c)$$

denotes the slope of the tangent to the curve in Fig. 9.

In this manner, the lateral force to an angle of oblique motion can be rapidly determined or the opposite, the angle of oblique motion to a lateral force.

### Maximum Angle of Oblique Motion

With a constantly increasing angle of oblique motion  $\beta$ , point B (see Fig. 8) moves constantly towards A until finally line AB forms the tangent to the curve for  $y_r$  at point A. At this point the adhesion force has been nullified in the entire range of contact and the lateral force will no longer increase by an increase of the angle  $\beta$  which has attained a value  $\beta_{\max}$  after points A and B coincide according to

$$\tan \beta_{\max} = \left( \frac{dy_r}{dx} \right)_{x=0} = \frac{4 f P_m}{c_0 s} \quad (21)$$

### Results

Since the component of force E perpendicular to the ground plane results from  $N = 1 s \int p d(x/s)$ , it follows from Equ. 7 and with the aid of Equ. 21 we obtain the result

$$P_m = 3 N / 2 s l \quad (22)$$

With Equ. 22 we obtain the lateral force S from Equ. 18 as a function of N,  $\beta$ ,  $f$ ,  $c_0$  and  $s$ .

Calculations in the following numerical examples have always been based on a 5.00x15 tire (i.e. 5 inches width and 15 inches diameter of the rim) with a 250 kg maximum load. This corresponds approximately to the values  $k/s^2 = 0.772 \text{ kg/cm}^2$  (as a measure for "tire hardness"),  $c_0/s = 4.80 \text{ kg/cm}^3$  (as a measure for the "lateral stiffness of the running surface", i.e. for the torsion modulus of the running surface rubber), and  $a^3/12k = 10.41 \cdot 10^{-6} \text{ 1/kg cm}$

(as a measure for the sidewall stiffness of the carcass and for the angle of intersection of the cord fibers respectively) from which  $c_2$  and  $s$  follow, so that  $S = f(N, \beta, f)$  only holds true with these constant values. Test values utilized for comparison were obtained with different tires and agree well with the results of calculation.

Fig. 10 shows the calculated relation  $S = f(\beta)$  for various  $N$  values and  $f = 0.8$ . Fig. 11 shows the relation for  $N = 200$  kg and various coefficients of friction  $f$ . The course of ratios  $S/N$  over the angle of oblique motion  $\beta$  given in Fig. 12 for some  $f$ -values corresponds to the measurements by O. Dietz and R. Harling (9). The relation  $S = f(N)$  calculated for some  $\beta$ -values has been compared with the measuring results of G. E. Lind Walker (10) in Figs. 13 and 14. This type of plotting, in contrast to that of Fig. 10, has the advantage that the curves do not intersect. Fig. 15 shows the course of  $c_2$  according to Equ. 19 over the load  $N$ . For small angles of oblique motion the lateral force can be made proportionally equal to the angle  $\beta$  by means of the proportionality factor  $k_1$  according to  $S = k_1 \beta$ . Measured values for  $k_1$  are also shown in Fig. 15. Fig. 16 finally shows the maximum angle of oblique motion defined according to Equ. 21 in relation to the load  $N$  and the coefficient of friction  $f$ . In the case of angles  $\beta > \beta_{\text{max}}$ , the lateral force no longer increases.

## (ALIASING-TORQUE)

Moment of Oblique Motion

The moment  $M_1$  around the steering axle cannot be equal to zero during oblique motion of the pneumatic tire. In general, the deformation plane ABC (see Fig. 8) is not located symmetrically to the steering axle and the static moment of this area with respect to the steering axle is a measure for the moment of oblique motion (steering moment)  $M_1$  of the tire. The following holds true

$$M_1 = \int_0^s \frac{ds}{dx} \left( x - \frac{s}{2} \right) dx \quad (23)$$

By substituting Equ. 16 and introduction of the approximation according to Equ. 18, we find

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{s^3 c_1}{12} \tan^4 \beta - \frac{s^4 c_1^2}{16 f p_m l} \tan^2 \beta + \frac{s^5 c_1^3}{64 f^2 p_m^2 l^2} \tan^3 \beta - \\ &\quad - \frac{s^6 c_1^4}{768 f^3 p_m^3 l^3} \tan^5 \beta \end{aligned} \quad (24)$$

As a calculation aid during the evaluation of Equ. 24 we can again introduce the term  $a_1$  according to Equ. 20 and obtain

$$M_1 = f p_m s^2 l \left[ \frac{a_1}{12} - \frac{a_1^2}{16} + \frac{a_1^3}{54} - \frac{a_1^4}{768} \right] \quad (25)$$

and

$$\frac{dM_1}{da_1} = f p_m s^2 l \left[ \frac{1}{12} - \frac{a_1}{8} + \frac{3a_1^2}{64} - \frac{a_1^3}{192} \right] \quad (26)$$

With  $\tan \beta_1 = \frac{1}{ls^2 f p_m} \frac{dm_1}{ds_1}$  as abbreviations, Eqns. 25 and 26

have been evaluated in Fig. 17 and in the two lower rows of Table 1.

The maximum moment of oblique motion  $M_{1\max}$  can be found by differentiation and letting Equ. 24 be equal to zero. We have

$$M_{1\max} = \frac{9}{256} l s^2 f p_m \quad (27)$$

with the angle of oblique motion

$$\beta = \arctan \frac{f p_m l}{c_1 s} \quad (28)$$

As shown by Figs. 18 and 19, the calculated moments agree well with the test values.

#### Lateral Force by Oblique Motion and Camber Angles

The projection of the central line of the undeformed band does not form a straight line in the inclined wheel (see Fig. 8) but an ellipse, Fig. 20. The equation of the central line IV of the undeformed band in the range of contact is as follows, if the ellipse is substituted by the parabola of the same azimuth

$$y_{band} = \frac{s^2}{2r} \sigma \frac{x}{s} \left( 1 - \frac{x}{s} \right) \quad (29)$$

$y_{band}$  denotes the distance of the parabola point from the  $x$ -axis,  $\sigma$  is the angle of camber and  $r$  is the radius.

The equation of the deformed band (characterized by the index 1), according to Equ. 12 and 24, is given by

$$y_{band_1} = \left( \frac{s^2}{2r} \zeta + \frac{xs}{c_0} \right) \frac{x}{s} \left( 1 - \frac{x}{s} \right) \quad (30)$$

The maximum local displacement  $y_r$  of an adhering point with respect to the band results corresponding to Equas. 14 and 15.

$$y_r = y_h + y_{band_1} \quad (31)$$

and, respectively,

$$y_r = \left( \frac{4p_m l}{c_0} + \frac{s^2}{2r} \zeta + \frac{xs}{c_0} \right) \frac{x}{s} \left( 1 - \frac{x}{s} \right) \quad (32)$$

The equation of the adhering point which corresponds to the band center is given by Equ. 13. The lateral force is obtained again from the plane between the curves for  $y_h$ ,  $y_r$  and  $y_{band_1}$  (see Fig. 20):

$$s = c_0 \int_0^{s_h} (y_h - y_{band_1}) dx + c_0 \int_{s_h}^s (y_r - y_{band_1}) dx \quad (33)$$

The evaluation of the integral, together with the abbreviation

$$\psi = f p_m \left( 1 - \frac{s^2 c_1}{8 r_c} \right)^6 \quad (34)$$

in which  $r_c$  denotes one half of the circumference, results

in an equation which corresponds to the approximation of Equ. 18

$$S = \frac{s^3 c_1}{12 r_s} \delta + \frac{s^2 c_1}{2} \tan \alpha - \frac{s^3 c_1^2}{8 s} \tan^2 \beta + \frac{s^4 c_1^3}{96 s^2} \tan^3 \beta \quad (35)$$

The angle of camber  $\delta$  has the positive sign when the wheel is tilted opposite to the direction of the lateral force exerted by the pavement.

The slope  $k_1$  of the curve  $S = f(\beta)$  at the point  $\beta = 0$  has the value  $k_1 = (\partial S / \partial \beta)_{\beta=0} = s^2 c_1 / 2$  and is independent of the angle of camber.

For a simple graphical plotting of Equ. 35, the first three rows of Table 1 can be utilized again if  $f p_m 1$  is replaced by  $\gamma_h$  and the term  $(s^3 c_1 / 12 r_s) \delta$  which is independent of the angle of oblique motion is taken into consideration.

The greatest angle of oblique motion  $\beta_{\max}$  results again when the straight line AB (see Fig. 20) becomes the tangent to the parabola of optimum deflection. It is given by

$$\tan \beta_{\max} = \frac{4 f p_m 1}{c_1 s} + \frac{s \delta}{2 r_s} \quad (36)$$

#### Moment of Oblique Motion by Oblique Motion and Camber Angles

The moment of oblique motion for the camber angle  $\delta = 0$  is again related to the static moment of the area between the curves for  $y_h$ ,  $y_p$  and  $y_{obm1}$  in Fig. 20 with respect to the steering axle. The term for the moment of oblique motion which corresponds to Equ. 24 in the case of

a camber angle which differs from zero then has the form

$$M_S = \frac{s^3 c_1}{12} \tan \delta - \frac{s^4 c_1^2}{16} \tan^2 \delta + \frac{s^5 c_1^3}{64} \tan^3 \delta - \frac{s^6 c_1^4}{768} \tan^4 \delta \quad (37)$$

For a rapid plotting of Equ. 37 the last two rows of Table 1 can be used again by substituting  $f_{\mu,1}$  by  $\psi$ .

The greatest moment of oblique motion is obtained from Equ. 37 as

$$M_{S_{\max}} = \frac{9}{256} f_{\mu,1} s^2 \left( f_{\mu,1} - \frac{s^2 c_1}{8 r_a} s \right) \quad (38)$$

for

$$\tan \delta = \frac{f_{\mu,1}}{c_1 s} - \frac{s^6}{8 r_a} \quad (39)$$

These equations however do not consider the influence of the

### Lateral Force by Wheel Camber

For  $\delta = 0$  it follows from Equ. 35 for the lateral force by the wheel camber alone (camber thrust):

$$S = k_S s \quad (40)$$

with the camber factor

$$k_S = s^3 c_1 / 12 r_a \quad (41)$$

According to Equ. 37, a moment of oblique motion does not occur in this case and the camber thrust is proportionally equal to the camber angle, according to Equ. 40 and as

confirmed by experiments (7,8). Figs. 21 and 22 show a comparison of the relation of the camber factor  $k_s$  which is calculated according to Equ. 41 with the load  $N$  and the course of  $S = k_s N$  determined by M. Olley (8). It can be seen that a good agreement exists between experiment and calculation.

#### Oblique Motion by Wheel Camber

If the lateral force formed by the wheel camber cannot be absorbed, then an oblique motion occurs in such a manner that Equ. 35 is satisfied for  $S = 0$ . The moment of oblique motion according to Equ. 37 which corresponds to the angles of camber and oblique motion is thus found.

#### Lateral Force by Curvature of the Track Curve

If an uncambered wheel without oblique motion moves on a path with the radius of curvature  $\varrho$ , then a lateral force occurs because the projection of the center of the band  $d$  (see Figs. 3 and 4) to the ground plane does not coincide with the point of all adhering points. The lateral force is therefore proportionally equal to the area  $F_1$  shaded in Fig. 23:

$$S = c_1 F_1 = c_1 \frac{\varrho^2}{2} (\varphi - \sin \varphi) = c_1 \frac{\varrho^2}{2} \left( 1 - \varphi + \frac{3}{6} + \dots \right)$$

when  $\varphi$  denotes the angle of the center of the zone of contact. On account of  $\varphi \ll s/\varrho$ , the following holds true

$$S \approx c_1 s^3 / 12 \quad (42)$$

The area  $F_1$  does not possess a static moment around the steering axle; no steering moment occurs consequently.

According to Equ. 42 the lateral force is reciprocally proportional to the radius of curvature  $\rho$  on account of the curvature of the path (curvature thrust) and in a direction opposite to the center of curvature, i.e.

$$S = k_k / \rho \quad (43)$$

with

$$k_k = c_1 s^3 l / 12 \quad (44)$$

as the curvature factor. This statement is of special practical importance since the curvature thrust cannot be measured on test drums. Fig. 24 shows the relation of the curvature factor to the load.

If the wheel has such a camber that the wheel axis intersects the ground plane in the center of curvature, then a lateral force does not occur because the projection of the undeformed center line of the band  $\delta$  to the ground plane coincides with the path curve. The wheel camber angle required for this is given by the following under the condition  $S = 0$  for  $\beta = 0$  according to Equs. 35 and 42

$$\delta = r_B / \rho \quad (45)$$

If the wheel moves in an arbitrary position to the ground plane on an arbitrary curve, then the following holds true for the lateral force

$$s = \frac{s^3 c_1}{12} \left( \frac{\delta}{r_a} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{s^2 c_1}{2} \tan \beta - \frac{s^3 c_1^2}{8 \psi_1} \tan^2 \beta$$

$$\frac{s^4 c_1^3}{96 \psi_1^2} \tan^3 \beta \quad (46)$$

and for the steering moment

$$M_1 = \frac{s^3 c_1}{12} \tan \beta - \frac{s^4 c_1^2}{16 \psi_1} \tan^2 \beta + \frac{s^5 c_1^3}{64 \psi_1^2} \tan^3 \beta -$$

$$- \frac{s^6 c_1^4}{768 \psi_1^3} \tan^4 \beta \quad (47)$$

with

$$\psi_1 = f R_m \left[ 1 - \frac{s^2 c_1}{8} \left( \frac{\delta}{r_a} + \frac{1}{\beta} \right) \right] \quad (48)$$

### Figures

Fig. 1. Denotations at the stressed, rubber-tired wheel which moves on a plane.

a = wheel rim

b = area of contact with the ground

c = path curve of the wheel with the radius of curvature  $\beta$

d = projection of the x-axis on the ground plane

e = projection of the y-axis on the ground plane

M = wheel center

R = attacking force

B, S and N = components of R in the direction of the x, y and z axes

$x_B$  and  $x_S$  = distance of the point of attack of N and S respectively in b from e

$y_B$  and  $y_N$  = distance of the point of attack of B and N respectively in b from d

$\alpha$  = angle between the tangent to c (intersection of d and e) and the x-direction

$\gamma$  = angle between wheel axle and ground plane

$\zeta$  = steering axle through N

$\eta$  = wheel axles through N

B, S and  $\pi$  = angles between B, S and N respectively and R.

---

Fig. 2. Partial section through a tire on a flat rim  
for trucks.

a = running surface

b = cord substructure (carrass)

c = inner tube

d = steel wire inserts

e = bead

f = rim edge

g = flat rim

---

Fig. 3. Internal view

Fig. 4. Cross Section

Figs. 3 and 4. Substitute model of a tire.

a = shaft

c = springs

e = running surface  
of width l

b = guides

d = thin band

---

compression stress

longitudinal direction of area of contact

Fig. 5. Distribution of compression stresses along the running surface of the tire according to a quadratic parabola.

---

**shear stress**

longitudinal direction of the area of contact

Shear stresses directed

towards the center of the area of contact only permit occurrence of a shear stress distribution according to a parabola.

Fig. 6. Distribution of shear stresses along the running surface of the tire according to a cubic parabola.

---

Fig. 7. Running surface deformed by a lateral force.

a = wheel cross section

b = running surface of thickness d

$y_0$  = deformation in the y-direction

---

Fig. 8. Deformation in the area of contact of the rolling wheel during oblique motion.

$s$  = area of contact of length  $s$  between tire and ground

$b$  = direction of rolling

$S$  = lateral force

$x$  and  $y$  = coordinates in the ground plane

$\beta$  = angle of oblique motion

I = position of the rim center and undeformed band C  
(see Figs. 3 and 4)

II = center of the deformed band

III = curve of the points of contact of the tire corresponding to II with the ground plane

A and C = points of contact and lift respectively

B = transition point from the adhesion into the sliding zone

D = point of intersection of the steering axle

$s_h$  and  $s_p$  = length of the area of contact in the adhesion and sliding zone respectively.

$y_h$  and  $y_p$  = distance of the curves III and I in the adhesion and sliding zones respectively

$y_{band}$  = distance of the curves II and I

$y_m$  = displacement of a point of contact with respect to the corresponding band point

---

referred lateral force

auxiliary aid  $a_1$

Fig. 9. Course of the referred lateral force  $S/1sfp_m$  over the auxiliary aid  $a_1$  according to Equ. 20a.

$\beta$  = angle of the tangent to the curve opposite to the

Fig. 10.  $a_1$  axis calculated according to Fig. 9.

---

lateral force S

angle of oblique motion  $\beta$

The slope of the solid curves attains a maximum value in  $\beta = 0$  with the approximate rated tire load of  $N = 250$  kg (the curves intersect).  $a$  = course of the empirical approximation equation  $S = f \tan (\epsilon_p \beta)$  according to O. Dietz and R. Harling (9) with  $f = 0.8$ ,  $N = 400$  kg and the tire constant  $\epsilon_p = 1$ .

Fig. 10. Calculated course of the lateral force S over the angle of oblique motion  $\beta$  for various loads  $N$  for a coefficient of friction  $f = 0.8$ .

---

lateral force

angle of oblique motion  $\beta$

Fig. 11. Calculated course of the lateral force S over the angle of oblique motion  $\beta$  for various coefficients of friction  $f$  with a load of  $N = 200$  kg. S does not depend upon  $f$  for smaller values of  $\beta$ .

---

referred lateral force S/N

angle of oblique motion

Fig. 12. Relation of the referred lateral force  $S/N$  to the angle of oblique motion  $\beta$  for various coefficients of friction  $f$  according to measurements of O. Dietz and R. Harling (9).

---

lateral force S

load N

Fig. 13. Course calculated for a coefficient of friction  $f = 0.8$ .

Figs. 13 and 14. Relation of the lateral force S to the load N for various angles of oblique motion  $\beta$ .

---

auxiliary aid  $c_1$

load N

proportionality factor  $k_1$

Fig. 15. Course of the auxiliary aid  $c_1$  and of the proportionality factor  $k_1$  over the load N.

Plotted test points for  $k_1$  according to G. Becker, H. Fromm and H. Maruhn (6).  $a$  = turning point tangent.

---

maximum angle of  
oblique motion  $\beta_{\max}$

load N

Fig. 16. Course of the maximum angle of oblique motion  $\beta_{\max}$  over the load N for various coefficients of friction  $f$ .

In the range of application of the wheel the angle  $\beta_{\max}$  which characterizes the start of skidding, is approximately proportionally equal to the load.

---

referred moment of  
oblique motion

auxiliary term  $a_1$

Fig. 17. Course of the referred moment of oblique motion  $M_1/ls^2 f p_m$  over the auxiliary term  $a_1$  according to Equ. 25.

$\epsilon_1$  = angle of the tangent to the curve opposite to the  $a_1$  axis.

---

moment of  
oblique  
motion  $M_1$

angle of oblique motion  $\beta$

Fig. 18. Calculated course of various loads N.

Fig. 19. Course according to measurements of A. W. Bull (7).

a = course for full load of the tire

b = course with 0.71 rated load

c = course with 1.25 rated load

Fig. 18 and 19. Relation of the moment of oblique motion (steering moments)  $M_1$  to the angle of oblique motion  $\beta$ .

---

Fig. 20. Deformation at the area of contact of a rolling, cambered wheel during oblique motion.

I = position of the rim center

IV = center of the undeformed band d (see Figs. 3 and 4) with the coordinate  $y_{band\ 0}$ .

$y_{band\ 1}$  coordinate of II (center of the undeformed band) and other denotations as in Fig. 8.

---

camber factor  $k_s$

load N

Fig. 21. Calculated relation of the camber factor  $k_s$  to the load N.

---

lateral force S

load N

Fig. 22. Course of the camber thrust S over the load N according to measurements of M. Olley (8) with a camber angle  $\delta = 5^\circ$ .

---

curvature factor  $k_k$

load N

Fig. 24. Relation of the curvature factor  $k_k$  to the load N.

---

Tables

Table 1

Auxiliary Terms for the Determination of the Lateral Force and of the Moment of Oblique Motion

auxiliary variable $a_1$	0	1	2	3	4
referred lateral force $\frac{S}{ls^2 f p_m}$	0	37/95	7/12	21/32	2/3
slope tan $\Sigma$	1/2	9/32	1/8	1/32	0
referred moment of oblique motion $\frac{M_1}{ls^2 f p_m}$	0	9/256	1/48	1/256	0
slope tan $f_1$	1/12	0	1/48	1/96	0

Bibliography

Zur Statik des Luftseifens.

- (1) J. Rotta: (To the Statics of the Pneumatic Tire).  
Ing-Arch. Vol 20 (1949) p. 129/41.
- (2) G. Heinrich: Zu Föppl's These der rollenden Reibung.  
(To Föppl's Theory of Rolling Friction). Oester. Ing.-Arch. Vol. 4 (1950) pp. 363/70.
- (3) L. Föppl: Die strenge Lösung zur rollenden Reibung  
(The Strict Solution to Rolling Friction). München 1946.
- (4) H. Martin: Druckverteilung in the Berührungsfläche zwischen Reifen und Fahrbahn (Pressure Distribution in the Area of Contact between Tire and Pavement).  
Automob-techn. Z. Vol. 38 (1936) pp. 230-32.
- (5) K. Girkmann: Festigkeitslehre (Strength of Materials).  
Vienna 1946.

- (6) G. Becker, H. Fromm and H. Maruhn: Schwingungen in  
in der Automobillenkung (Vibrations in Automobile  
Steering) Berlin 1931.
- (7) A. W. Bull: Tyre Behaviour in Steering. J. Soc.  
Amer. Engrs. Vol. 44 (1939) pp. 344-350.
- (8) M. Olley: Road Manners of Modern Car. Proc. Inst.  
Automob. Engrs. Vol. 41 (1946/47) pp. 147-82.
- (9) O. Dietz and R. Harling: Die Fahrlage des Kraftwagens  
in der Kurve (Position of the Automobile in the Curve).  
Deutsche Kraftfahrforsch. No. 44, 1940.
- (10) G. E. Lind Walker: Directional Stability. Automob.  
Engr. Vol. 40 (1950) pp. 281-285.

#### Footnotes

1. Report from the Institute for Internal Combustion Engines  
and Motor-Transport Service of the Technical College,  
Vienna.
2. See, for example (6 to 8).

ubstituierte

Bremung

ppenstahl.

Lackbinden

von Zwei-

die zweite

effizienten

von Hoch-

tonzganges

)

(Schäfer;

ation von

on Sulfin-

indungen.

Schwefel-

Schaum-

) und für

(Scheil;

gelböden.

Seite

... 941

vol-

ind

... 946

... 951

irs.

... 955

ge-

... 960

... 961

en

... 962

... 962

Vortr.:  
Schrift:  
VDI,  
VDI,  
f.  
nicht  
eitung,

77/79,

Printed

Vertr.:

15 DM  
andol.10 DM  
Heft

ewells

:

Copy for Personal Use Only - The Library, University of California at Berkeley

# VDI

Rum 215

## ZEITSCHRIFT DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

Bd. 96

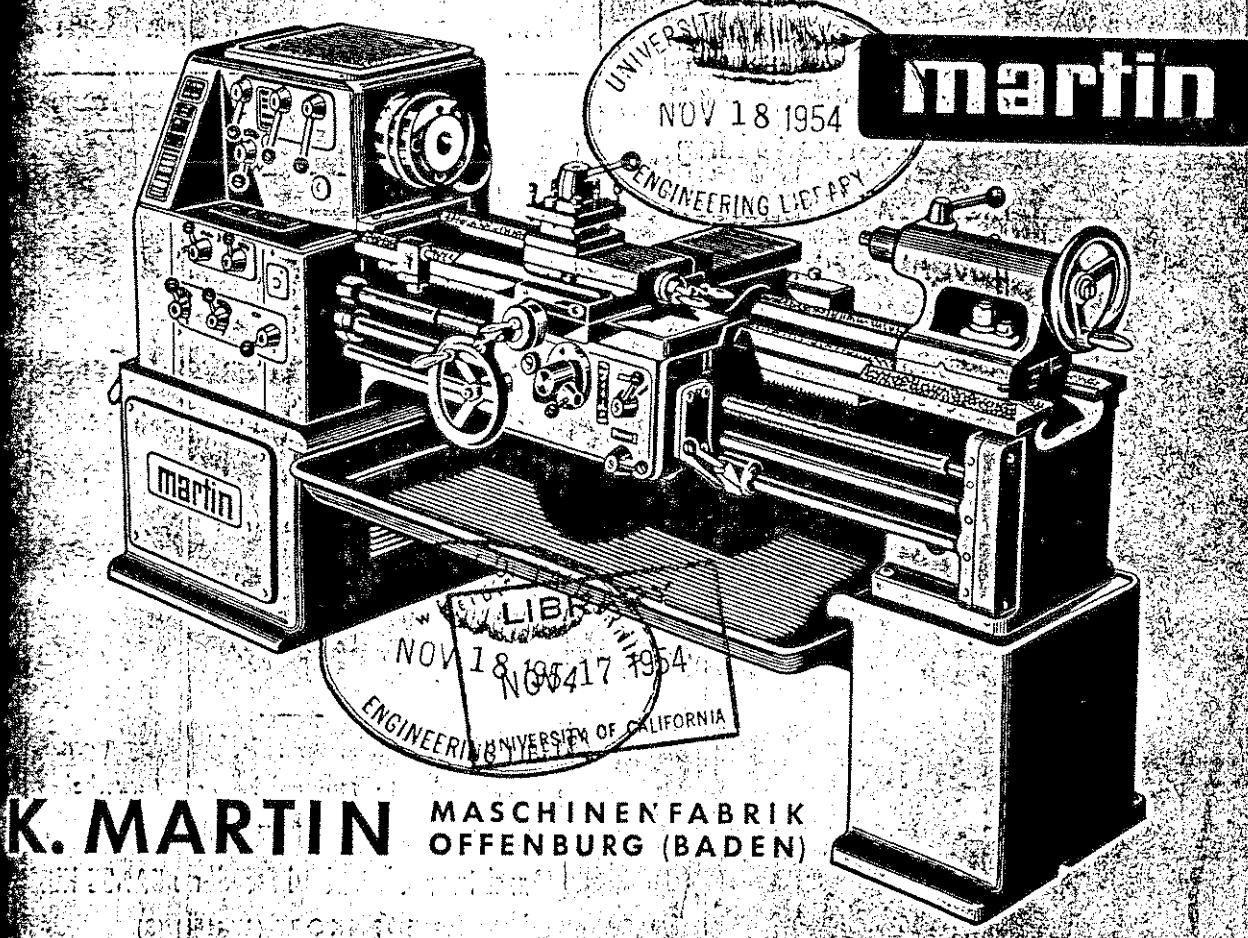
Düsseldorf, 11. Oktober 1954

Nr. 29

**Inhalt:**

Verkehrsbeleuchtung; Lichttechnische und energiewirtschaftliche Aufgabe —  
 Volkswirtschaftliche Forderung, 965. Seitenkräfte am rollenden Luftreifen, 973.  
 Form der Schilder von Planierraupen zum Erzielen möglichst kleiner Füll-  
 widerstände, 982. Fahrscheindrucker, 988.

(Vollständiges Verzeichnis Seite 996)



Z. VDI BAND 96 Nr. 29 SEITE 965 bis 996 DÜSSELDORF, 11. Oktober 1954



DK 531.781: 629.11.012.55

# Seitenkräfte am rollenden Luftreifen

This material may be  
protected by copyright law  
(Title 17 U.S. Code)  
Von E. Fiala, Wien<sup>1)</sup>

Die zahlreichen vorliegenden Versuchsergebnisse über das Verhalten des Luftreifens bei gummibereiften Fahrzeugen und über den Einfluß der Seiten- und Umfangskräfte auf die Radverformungen kann man durch theoretisch begründete Formeln darstellen. Den theoretischen Vorstellungen liegt ein Ersatzmodell der Spannungsverteilung in der Berührungsfläche zwischen dem Reifen und der Bodenebene zugrunde. Unter der Annahme einer parabelförmigen Verteilung der Druckspannungen über die Längsachse der Berührungsfläche folgen aus den Kraftansätzen die Radverformungen durch Kräfte, die senkrecht zur Bodenebene, in der Radumfangsrichtung und quer zur Radebene wirken. Damit wird es auch möglich, das Schräglauen des Reifens unter dem Einfluß von Seitenkräften zu erklären. Zum Berechnen der am häufigsten vorkommenden Fälle dienen Näherungsformeln, die an Hand von Zahlenbeispielen erläutert werden.

## Benennungen und Grundansätze

Ein gummibereiftes Rad berühre in beliebiger Lage die Bodenebene und bewege sich darauf entlang einer Kurve, Bild 1. Im Radmittelpunkt M greife dabei die Kraft  $R$  an und befindet sich auch der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen  $z$ -Richtung normal zur Bodenebene verläuft und dessen  $y$ -Achse in der von der  $z$ -Achse und der Achse des Rades bestimmten Ebene liege. Die Angriffslinie der Kraft  $R$  schneidet nicht notwendig die Berührungsfläche des Reifens mit dem Boden, den „Latsch“, so daß noch ein Moment  $M_1$  vorhanden sein muß, um das Gleichgewicht herzustellen. Die Radachse schließt mit der Bodenebene bzw. mit der  $y$ -Achse den Winkel  $\sigma$  (Sturzwinkel) ein, die Tangente an die Bahnkurve mit der  $x$ -Richtung den Winkel  $\beta$  (Schräglauwinkel).

Zerlegt man  $R$  nach Bild 1 in die Komponenten  $B$ ,  $S$  und  $N$  in Richtung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse, so gilt, wenn  $\vartheta_B$ ,  $\vartheta_N$  und  $\vartheta_S$  die entsprechenden Winkel zwischen den Kraftkomponenten und  $R$  sind,

<sup>1)</sup> Mitteilung aus dem Institut für Verbrennungsmotoren und Kraftfahrwesen der Technischen Hochschule Wien.

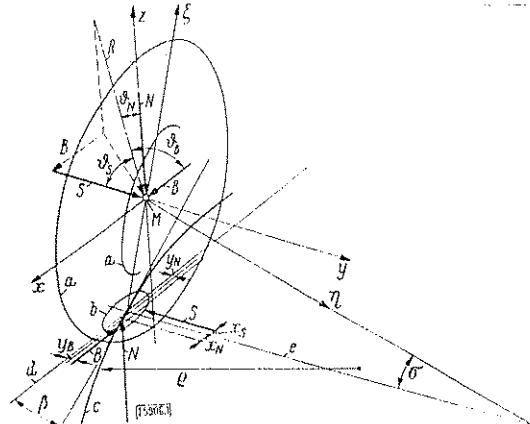


Bild 1. Bezeichnungen am kräftebelasteten, gummibereiften und auf einer Ebene bewegten Rad.

- a Radberandung
- b Berührungsfläche mit dem Boden
- c Bahnkurve des Rades vom Krümmungshalbmesser  $r_a$
- d Projektion der  $x$ -Achse auf die Bodenebene
- e Projektion der  $y$ -Achse auf die Bodenebene
- M Radmittelpunkt
- R angreifende Kraft
- $B$ ,  $S$  und  $N$  Komponenten von  $R$  in Richtung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse
- $x_N$  Abstand des Angriffspunktes von  $N$  bzw.  $S$  in  $b$  von  $a$
- $y_B$  und  $y_N$  Abstand des Angriffspunktes von  $B$  bzw.  $N$  in  $b$  von  $d$
- $\beta$  Winkel zwischen der Tangente an  $e$  (im Schnittpunkt von  $d$  und  $e$ ) und der  $x$ -Richtung
- $\sigma$  Winkel zwischen der Radachse und der Bodenebene
- $\xi$  Lenkachse durch  $M$
- $\eta$  Radachse durch  $M$
- $\vartheta_B$ ,  $\vartheta_S$  und  $\vartheta_N$  Winkel zwischen  $B$ ,  $S$  bzw.  $N$  und  $R$

$$B = R \cos \vartheta_B \quad \dots \quad (1a),$$

$$S = R \cos \vartheta_S \quad \dots \quad (1b),$$

$$N = R \cos \vartheta_N \quad \dots \quad (1c),$$

und

$$R = \sqrt{N^2 + S^2 + B^2} \quad \dots \quad (1d).$$

Ferner seien bezeichnet:  
als Radmittenebene die Ebene senkrecht zur Radachse durch den Radmittelpunkt,  
als Lenkachse  $\xi$  die Achse durch die Radmitte normal zu der durch die von der Rad- und der  $x$ -Achse bestimmten Ebene und  
als Rollhalbmesser  $r_a$  der Abschnitt auf der Lenkachse zwischen dem Radmittelpunkt und dem Durchstoßpunkt durch die Bodenebene.

Mit  $x_N$  und  $x_S$  als Abstand des Angriffspunktes von  $N$  bzw.  $S$  von der  $y$ -Achse sowie  $y_B$  und  $y_N$  als Abstand des Angriffspunktes von  $B$  bzw.  $N$  in der Projektion nach Bild 1 auf die Bodenebene ergibt sich als Bremsmoment (Antriebsmoment)  $M_b$  das Moment um die Radachse:

$$M_b = B (r_a - y_B \sin \beta) - N x_N \quad \dots \quad (2),$$

als Sturzmoment  $M_s$  das Moment um die  $x$ -Achse:

$$M_s = N (r_a \sin \sigma - y_S) + S r_a \cos \sigma \quad \dots \quad (3)$$

und als Lenkmoment  $M_l$  das Moment um die Lenkachse:

$$M_l = B y_B \cos \sigma + S x_S \quad \dots \quad (4).$$

Nachfolgend sollen die Beziehungen zwischen den Kräften  $N$  und  $S$  und dem Schräglauwinkel  $\beta$ , dem Sturzwinkel  $\sigma$  sowie dem Krümmungshalbmesser  $r_a$  der Bahnkurve hergestellt werden.

## Aufbau des Luftreifens und seines Modells

Der heute im Kraftfahrzeugbau verwendete Reifen besteht im wesentlichen aus zwei Baustoffen mit ziemlich verschiedenen Eigenschaften, nämlich aus der Karkasse, die aus Baumwolle oder Kunstseide besteht und dem Reifen das Gerüst liefert, und aus Gummi, der als Bindemittel und als Lauffläche dient. Ferner sind Stahlseile in den Reifenwulst eingebettet, die den sicheren Sitz des Reifens auf der Felge gewährleisten. Bild 2. Die Flugzeugreifen unterscheiden sich von den Kraftfahrzeureifen durch eine wesentlich dünneren Wanddicke, weil die Kilometerleistung nicht so groß sein muß und die Forderung nach kleinem

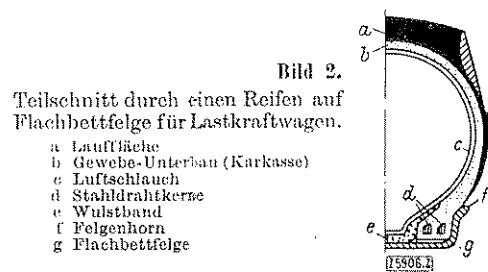


Bild 2.  
Teilschnitt durch einen Reifen auf Flachbettfelge für Lastkraftwagen.

- a Lauffläche
- b Gewebe-Unterwan (Karkasse)
- c Luftschaft
- d Stahldrahtkerze
- e Wulstband
- f Felgenhorn
- g Flachbettfelge



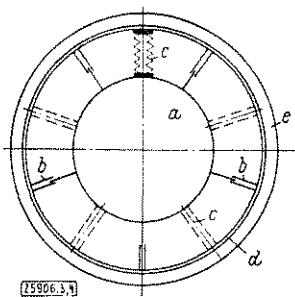


Bild 3. Seitenansicht.

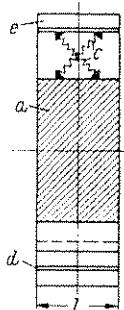


Bild 4. Querschnitt.

Bild 3 und 4. Ersatzmodell des Luftreifens.  
a Nabe  
b Führungen  
c Federn  
d Laufband von der Breite l  
e Laufband von der Breite l

Reifengewicht in noch größerem Maße besteht als bei Kraftfahrzeugen.

Die Verformungen des Reifens werden nun statt am Luftreifen an einem geeigneten Modell betrachtet, Bild 3 und 4. Dieses Modell bestehen aus der starren Nabe a, den Führungen b (die ein Verschieben des Radumfangs gegen die Nabe in der Umfangsrichtung verhindern), den Federn c (die den Verschiebungen des Radumfangs aus der Gleichgewichtslage in die beiden anderen Richtungen der Verschiebung proportionale Kräfte entgegensetzen), dem dünnen Band d (mit einem endlichen Widerstandsmoment um den Halbmesser) und dem tangential schubweichen Laufband e mit der Lauffläche. Das Ersatzmodell hat die Breite l.

Zunächst sei untersucht, welche Teile des Modells den Teilen des Luftreifens entsprechen. Die Nabe a ist im Verhältnis zum Luftreifen sehr steif und kann daher als starr angenommen werden. Die Führungen b entsprechen den Seitenwänden des Reifens. Diese können nämlich wegen der diagonal eingebetteten Cordfäden nur eine ganz kleine Schubverformung in der Umfangsrichtung erfahren. Die Federn c bewirken, daß eine Eindrückung eine ansteigende Kraft zur Folge hat. Die vom Band d auf die Nabe übertragene Seitenkraft ist der Verschiebung in der y-Richtung (vgl. Bild 1) für nicht zu große Werte verhältnismäßig [1]. Das biegungsweiche Band d entspricht der Cordeinlage in der Reifenkrone, die Lauffläche e des Modells der Lauffläche des wirklichen Reifens. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Reifen und dem Modell besteht darin, daß die Berührungsfläche dort ein Oval, hier ein Rechteck ist. Daher treten beim Modell keine Schubspannungen in der y-Richtung auf.

### Spannungsverteilung in der Berührungsfläche

Unter der Voraussetzung gleicher Werkstoffe für das Rad und die Bodenebene treten beim Rollen keine Schub-

spannungen auf, sofern die Umfangskraft gleich null ist. Wie G. Heinrich [2; 3] gezeigt hat, ändern die im Falle des freien Rollens ( $M_b = 0$ ) auftretenden Schubspannungen nichts an der Druckspannungsverteilung nach H. Hertz. Haben das Rad und die Bodenebene aber verschiedene elastische Konstanten, so treten schon bei freiem Rollen gleich große, entgegengesetzte gerichtete Schubspannungen auf [4]. Wie sich die Spannungsverteilung unter dem Einfluß von Umfangskräften ändert, wurde wohl bisher nicht untersucht. Die Messungen von H. Martin [4] rechtfertigen die Annäherung der wahren Druckspannungsverteilung über die Länge der Berührungsfläche durch eine quadratische und der wahren Schubspannungsverteilung durch eine kubische Parabel, Bild 5 und 6.

### Verformung des Reifens durch Seitenkräfte

Beim Übertragen einer Seitenkraft von der Bodenebene auf die Radfelge werden folgende Teile des Reifens bzw. des Modells in Anspruch genommen:

1. Die Lauffläche von e (vgl. Bild 3 und 4) überträgt Seitenkräfte, die der Verschiebung des betreffenden Berührungspunktes gegen das Band d an jeder Stelle verhältnismäßig sind.
2. Das Band d wird örtlich begrenzt durch die Bodenkraft belastet. Der Verformung wirken das Widerstandsmoment des Bandes d und die seitliche Stützkraft der Federn c entgegen.

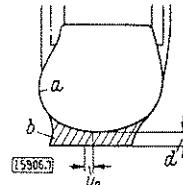
### Verformung der Lauffläche

Ein Reifenelement von der Länge dx in x-Richtung und der Breite l überträgt bei einer Verformung um die Strecke  $y_0$  in y-Richtung eine Seitenkraft  $dS$  nach

$$dS = l(Gy_0/d)dx \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

wenn  $G = E/(2(1+\mu))$  mit  $E$  als Elastizitätsmodul und  $\mu$  als Querzahl den Gleitmodul sowie  $d$  die Dicke der Gleitfläche bedeuten, Bild 7.

Bild 7. Durch eine Seitenkraft verformte Lauffläche.  
a Radquerschnitt  
b Lauffläche von der Dicke d  
 $y_0$  Verformung in y-Richtung



### Verformung des Bandes d (bzw. der Karakasse)

Das Band d wird als langer, senkrecht zur Momenten-ebene schwach gekrümmter Träger aufgefaßt, der örtlich belastet, aber auf seiner ganzen Länge gestützt wird. Nach J. Rotta [1] ist für kleine Verschiebungen die Stützkraft verhältnismäßig der Verschiebung des Bandes gegen die Felge, so daß das Band wie ein Träger auf elastischer Unterlage behandelt werden kann. Die seitliche Stützwirkung kommt dabei in der Bettungszahl nach K. Girkmann [5] zum Ausdruck, die eine Spannung darstellt und angibt, welche Kraft je Längeneinheit einer Eindrückung entgegensteht.

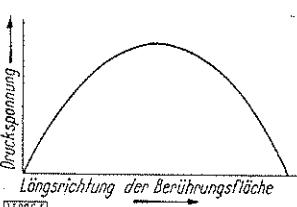
Die Gleichung der elastischen Linie des Bandes d lautet nach K. Girkmann [5], wenn S als in der y-Richtung wirkende Punktlast im Koordinatenursprung angenommen wird (vgl. Bild 1) und  $y_{\text{Band}}$  die ihr entsprechende Bandauslenkung ist,

$$\bar{y}_{\text{Band}} = -(\alpha S/2k)e^{-\alpha \bar{x}}(\cos \alpha \bar{x} + \sin \alpha \bar{x}) \quad \dots \quad (6)$$

Dabei bedeuten  $k$  die Bettungszahl und  $\alpha$  mit  $E$  als Elastizitätsmodul sowie  $J$  als Trägheitsmoment des Bandes d (bezogen auf seinen Halbmesser) den Ausdruck  $\alpha = \sqrt{k/EJ}$ .

Die Querstriche bei  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  sollen andeuten, daß der Koordinatenursprung hierbei in der Mitte der Berührungsfläche liegt.

Bild 5. Verteilung der Druckspannungen längs der Lauffläche des Reifens nach einer quadratischen Parabel.



Erst die zur Mitte der Berührungsfläche hin gerichteten Schubspannungen ermöglichen das Auftreten der Druckspannungsverteilung nach einer Parabel.

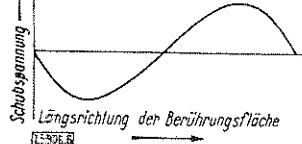


Bild 6. Verteilung der Schubspannungen längs der Lauffläche des Reifens nach einer kubischen Parabel.

a Be  
b R  
S Sc  
z ur  
β Sc  
I Li  
II M  
III K  
A B  
B C  
D D  
 $\delta_h$  n  
 $\nu_h$  n  
 $\nu_{Ja}$   
 $\nu_m$  V  
 $\nu_p$

Jede  
verb  
Kraf  
erlei  
Bild  
dem  
(Pur  
von  
wert  
Druc  
falle  
null

wen  
Bild  
D  
han  
und  
in c  
der  
Par

vert  
Dru  
bed  
den  
von  
Auf  
wie  
der  
der



ist.  
les  
gen  
rzt.  
me  
len  
gen  
in-  
eht  
zen  
ing  
ra-  
ch

ene  
nw.  
igt  
len  
elle  
aft  
dsler

ng  
lie  
5),  
mu-  
it-

r-  
n-  
ch  
ch  
ft  
ie  
n-  
ig  
5]  
t,  
t-

et  
r-  
on  
l-  
).  
i-  
d-  
f.  
y-  
s-

Die Potenzreihenentwicklung von Gl. (6) gibt unter Vernachlässigung der Glieder dritter und höherer Ordnung für kleine  $x$ -Werte

$$\bar{y}_{\text{Band}} = -(a S/2k) (1 - x^2 \bar{x}^2) \dots \quad (6a)$$

### Seitenkraft und Schräglaufwinkel

Bekanntlich rollt der Luftreifen meist nicht senkrecht zur Drehachse. Eine häufige Ursache dieser Erscheinung, des Schräglauens, ist eine Seitenkraft. Die Abhängigkeit der Seitenkraft vom Schräglaufwinkel wurde mehrfach versuchsmäßig erfaßt<sup>2)</sup>, doch war es bisher nicht möglich, vergleichbare Werte für verschiedene Reifen anzugeben.

Das Zustandekommen des Schräglauwinkels infolge Seitenkraft kann am Reifenmodell erklärt werden. Das Band d (vgl. Bild 3 und 4) hat sich in der Umgebung der Berührungsstelle seitlich verformt, Kurve II in Bild 8.

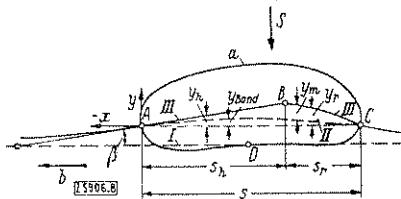


Bild 8. Verformung in der Berührungsfläche des rollenden Rades beim Schräglau.

- a Berührungsfläche von der Länge  $s$  zwischen dem Reifen und dem Boden
- b Rollrichtung
- S Seitenkraft
- $x$  und  $y$  Koordinaten in der Bodenebene
- $\beta$  Schräglauwinkel
- I Lage der Feigenmitte bzw. des unverformten Bandes d (vgl. Bild 3 u. 4)
- II Mitte des verformten Bandes
- III Kurve der zu II gehörenden Berührungspunkte des Reifens mit der Bodenebene
- A und C Aufsetz- bzw. Abhebepunkt
- B Übergangspunkt von der Haft- in die Rutschzone
- D Durchstoßpunkt der Lenkkäse
- $s_h$  und  $s_r$  Länge der Berührungsfläche in der Haft- bzw. der Rutschzone
- $y_h$  und  $y_r$  Abstand der Kurven III und I in der Haft- bzw. der Rutschzone
- $y_{\text{Band}}$  Abstand der Kurven II und I
- $y_m$  Verschiebung eines Berührungspunktes gegen den zugehörigen Bandpunkt

Jeder Punkt der Lauffläche, der mit dem Band elastisch verbunden ist, folgt der Bahn des Bandes, solange keine Kraft auf ihn ausgeübt wird. Jeder Punkt der Lauffläche erleidet nach dem Aufsetzen auf den Boden (Punkt A in Bild 8) eine Verschiebung in der  $y$ -Richtung gegenüber dem Band, die so lange zunimmt, bis die Haftgrenze (Punkt B) überschritten wird. Die Schubverformung ist von da an nur mehr eine Funktion des örtlichen Haftwertes  $f p$  (mit  $f$  als Reibungszahl und  $p$  als örtlichem Druck) und muß deshalb zum Rand hin immer mehr abfallen und beim Abheben vom Boden (Punkt C) wieder null sein. Der Haftwert des ganzen Reifens beträgt

$$l \int_0^s f p ds = f N,$$

wenn  $s$  die Gesamtlänge der Berührungsfläche ist (vgl. Bild 8).

Die Größe des Schräglauwinkels  $\beta$  und der Zusammenhang mit der Seitenkraft  $S$  können mit Hilfe des Modells und einfacher Annahmen über die Spannungsverteilung in der Berührungsfläche abgeschätzt werden. Hierzu sei der Druck  $p$  über der Berührungsfläche als nach einer Parabel

$$p = 4 p_m \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right) \quad (7)$$

verteilt angenommen (vgl. Bild 5), wenn  $p_m$  den größten Druck in der Berührungsfläche von der Gesamtlänge  $s$  bedeutet und der Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt A (vgl. Bild 8) verlegt wird. Nach Messungen von H. Martin [4] verhalten sich die Größtwerte des Auflagedrucks zum Mittelwert tatsächlich etwa wie 1,5:1, wie es bei der Parabel mit dem Koordinatenursprung in A der Fall ist. Die Schubspannungen durch die Abplattung der Reifenkrone sollen vernachlässigt werden.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. [6 bis 8].

Die größte verfügbare örtliche Haftkraft je Flächeneinheit ist in jedem Berührungs punkt des Laufbandes von der Breite  $l$  durch

$$fp = 4 f p_m \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right) \quad (8)$$

gegeben. Mit  $c_0$  als Proportionalitätsfaktor kann man auch den örtlichen Haftwert  $p$  nach

$$f p l = c_0 y_m \quad (9)$$

der größtmöglichen Verschiebung  $y_m$  (vgl. Bild 8) verhältnisgleich setzen. Es ist also

$$y_m = f p l / c_0 \quad (10)$$

Der Faktor  $c_0$  wird damit auch ein Maß für das Verhältnis der örtlichen Seitenkraft je Flächeneinheit zur Verschiebung und entspricht daher dem Gleitmodul  $G$  in Gl. (5).

Die Größe der seitlichen Verschiebung  $y$  eines haftenden Punktes gegen den zugehörigen Punkt des Bandes ist durch den Schräglauwinkel  $\beta$ , den Abstand vom Aufsetzpunkt A (also durch  $x$ ) und durch die Verformung des Bandes nach Gl. (6a) bestimmt. Bezieht man Gl. (6a) ebenfalls auf den Aufsetzpunkt A, so geht sie mit der Abkürzung

$$z = a^2 s^2 c_0 / 2 k \quad (11)$$

in

$$y_{\text{Band}} = \frac{z S}{c_0} \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right) \quad (12)$$

über. Ein Punkt der Lauffläche erfährt nach dem Aufsetzen in A eine zunehmende Verschiebung gegenüber dem zugehörigen Bandpunkt so lange, bis die örtliche Seitenkraft  $c_0 y$  je Flächeneinheit gleich dem örtlichen Haftwert  $fp$  geworden ist (Punkt B).

Längs der Strecke  $\overline{AB}$  von Kurve III (vgl. Bild 8) für die ursprünglich unter der Bandmitte (Kurve II) liegenden Punkte der Lauffläche in der Haftzone (Index h) gilt

$$y_h = x \tan \beta \quad (13)$$

In der Rutschzone (Index r), die sich auf der Kurve III von B bis C erstreckt, wird nach Bild 8

$$y_r = y_{\text{Band}} + y_m \quad (14)$$

bzw. mit  $y_{\text{Band}}$  nach Gl. (12) und  $y_m$  nach Gl. (8) und (9)

$$y_r = \left( \frac{4 f p_m l}{c_0} + \frac{z S}{c_0} \right) \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right) \quad (15)$$

Im Augenblick des Abhebens (Punkt C) schließlich sind die örtlichen Werte der Haft- und der Seitenkraft null, d. h. die Berührungspunkte liegen wieder unter den zugehörigen Bandpunkten (die Kurven II und III decken sich).

Die ausgeübte Seitenkraft ist der in Bild 8 von den Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  sowie von der Kurve II eingeschlossenen Fläche verhältnisgleich. Es gilt somit

$$S = c_0 \int_0^{s_h} \left[ x \tan \beta - \frac{z S}{c_0} \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right) \right] dx + \\ + l \int_{s_h}^s 4 f p_m \frac{x}{s} \left(1 - \frac{x}{s}\right) dx \quad (16)$$

Für die Koordinaten  $x_1 = s_h$  und  $y_1$  des Punktes B (vgl. Bild 8), in dem das Zurückrutschen beginnt, folgt aus Gl. (13) und (15)

$$s_h = s - \frac{c_0 s^2 \tan \beta}{4 f p_m l + z S}$$

$$\text{bzw. } y_1 = s_h \tan \beta.$$

Die Auswertung von Gl. (16) ergibt

$$S = \frac{1}{1 + (x s / 6)} \left[ \frac{c_0 s^2}{2} \tan \beta - \frac{c_0^2 s^3}{A} \tan^2 \beta \left( 2 f p_m l + \frac{z S}{2} \right) + \frac{c_0^3 s^4}{B} \tan^3 \beta \left( 2 f p_m l + \frac{z S}{2} \right) \right] \quad (17)$$

mit  $A = 16 f^2 p_m^2 l^2 + 8 f p_m l z S + z^2 S^2$

und  $B = 3 (4 f p_m l + z S) A$ .



Die Bestimmung der Seitenkraft  $S$  aus Gl. (17) ist nur durch Probieren möglich. Es wird daher eine Näherungsgleichung

$$S = \frac{c_1 s^2}{2} \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{8} \frac{c_1^2 s^3}{f p_m l} \operatorname{tg}^2 \beta + \frac{1}{96} \frac{c_1^3 s^4}{f^2 p_m^2 l^2} \operatorname{tg}^3 \beta \quad (18)$$

mit  $c_1 = \frac{c_0}{1 + (z/s)/6}$  (19)

eingeführt, die bei  $\beta = 0$  die gleichen Werte für  $S$  und  $dS/d\beta$  sowie beim Höchstwert  $\beta = \beta_{\max}$  des Schräglauftwinkels die gleichen Werte für  $S$ ,  $dS/d\beta$  und  $d^2S/d\beta^2$  wie Gl. (17) liefert.

#### Rechenhilfen

Auch mit Gl. (18) ist die Seitenkraft nur mühsam aus dem Winkel  $\beta$  zu ermitteln. Vor allem treten kleine Unterschiede großer Zahlen auf. Im folgenden wird daher noch eine Rechenhilfe gegeben, die es gestattet, die Kurven für die Funktion  $S = f(\beta)$  schnell und genau zu zeichnen. Faßt man nach

$$\operatorname{tg} \beta = a_i / (f p_m l / c_1 s) \quad (20)$$

die willkürlich gewählte Hilfsgröße  $a_i$  an Stelle von  $\beta$  als Veränderliche auf, bei der der Index  $i$  andeutet, daß man beim Auswerten  $a_i = 1, 2, 3, \dots$  setzt, so erhält man aus Gl. (18) sofort

$$S = l s / p_m \left( \frac{a_i}{2} - \frac{a_i^2}{8} + \frac{a_i^3}{96} \right) \quad (20a)$$

und  $\frac{dS}{da_i} = l s / p_m \left( \frac{1}{2} - \frac{a_i}{4} + \frac{a_i^2}{32} \right)$  (20b).

In Tafel 1 und Bild 9 sind Gl. (20a) und (20b) ausgewertet worden; dabei bedeutet

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{l s / p_m} \frac{dS}{da_i}$$

die Neigung der Tangente an die Kurve in Bild 9. Hiermit kann man rasch die Seitenkraft zu einem Schräglauftwinkel

Tafel 1. Hilfswerte zum Bestimmen der Seitenkraft und des Schräglauftwinkels.

Hilfsveränderliche $a_i$	0	1	2	3	4
Bezogene Seitenkraft $\frac{S}{l s / p_m}$	0	37/96	7/12	21/32	2/3
Neigung $\operatorname{tg} \beta$	1/2	9/32	1/8	1/32	0
Bezogenes Schräglauftwinkelmoment $\frac{M}{l s^2 / p_m}$	0	9/256	1/48	1/256	0
Neigung $\operatorname{tg} \beta_i$	1/12	0	1/48	1/96	0

oder umgekehrt den Schräglauftwinkel zu einer Seitenkraft ermitteln.

#### Größter Schräglauftwinkel

Bei immer größer werdendem Schräglauftwinkel  $\beta$  rückt der Punkt B (vgl. Bild 8) immer weiter gegen A, bis schließlich die Gerade AB zur Tangente an die Kurve für  $y_r$  im Punkt A wird. Nun ist die Haftkraft im ganzen Berührungsgebiet erschöpft, und die Seitenkraft wird auch

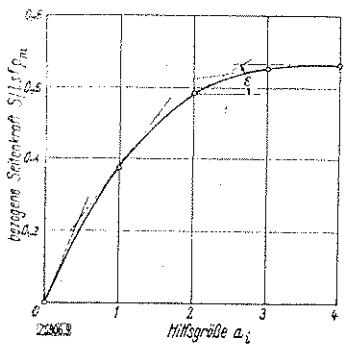


Bild 9. Verlauf der bezogenen Seitenkraft  $S/l s / p_m$  über der Hilfsgröße  $a_i$  nach Gl. (20a).

$\beta$  Winkel der Tangente an die Kurve gegen die  $a_i$ -Achse

durch eine Vergrößerung des Winkels  $\beta$  nicht mehr wachsen, der beim Zusammenfallen der Punkte A und B den Wert  $\beta_{\max}$  nach

$$\operatorname{tg} \beta_{\max} = \left( \frac{dy_r}{dx} \right)_{x=0} = \frac{4 f p_m l}{c_1 s} \quad (21)$$

erreicht hat.

#### Ergebnisse

Da sich die Kraftkomponente  $N$  senkrecht zur Bodenfläche aus  $N = l s \int_0^\beta p d(x/s)$  ergibt, folgt aus Gl. (7)

$$p_m = 3 N/2 s l \quad (22)$$

Mit Gl. (22) erhält man aus Gl. (18) die Seitenkraft  $S$  als Funktion von  $N$ ,  $\beta$ ,  $f$ ,  $c_1$  und  $s$ .

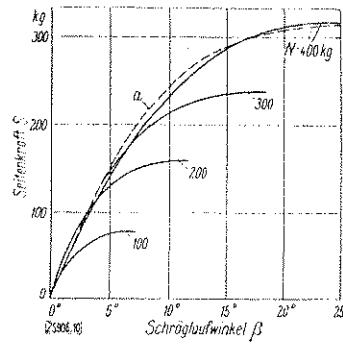


Bild 10. Berechneter Verlauf der Seitenkraft  $S$  über dem Schräglauftwinkel  $\beta$  für verschiedene Belastungen  $N$  bei einer Reibungszahl  $f = 0,8$ .

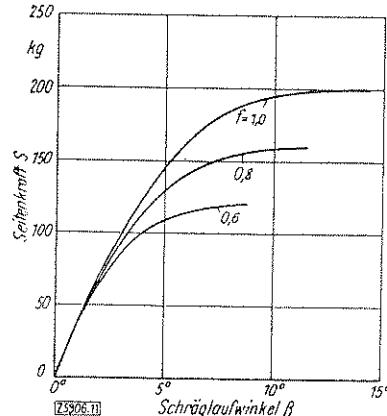


Bild 11. Berechneter Verlauf der Seitenkraft  $S$  über dem Schräglauftwinkel  $\beta$  für verschiedene Reibungszahlen  $f$  bei einer Belastung  $N = 200$  kg.  
Bei kleinen  $\beta$ -Werten hängt  $S$  nicht von  $f$  ab.

In den nachfolgenden Zahlenbeispielen ist stets der Rechnung ein Reifen 5,00—15 (d. h. mit 5 Zoll Breite und 15 Zoll Durchmesser der Felge) bei 250 kg Nennlast zugrunde gelegt. Dies entspricht etwa den Werten  $N/s^2 = 0,772$  kg/cm<sup>2</sup> (als ein Maß für die „Reifenhärte“),  $c_0/s = 4,80$  kg/cm<sup>3</sup> (als ein Maß für die „Seitensteifigkeit der Lauffläche“, d. h. für den Gleitmodul des Laufflächen-Gummis) und  $a^3/12 k = 10,41 \cdot 10^{-6}$  1/kg cm (als ein Maß für die Seitensteifigkeit der Karkasse bzw. für den Kreuzungswinkel der Cordfäden), aus denen  $c_1$  und  $s$  folgen, so daß nur noch  $S = f(N, \beta, f)$  mit diesen konstanten Werten gilt. Zum Vergleich herangezogene Meßwerte wurden an verschiedenen Reifen erhalten und stimmen mit dem Ergebnis der Rechnung gut überein.

Bild 10 zeigt die berechnete Abhängigkeit  $S = f(\beta)$  für verschiedene  $N$ -Werte und  $f = 0,8$ , Bild 11 für  $N = 200$  kg und verschiedene Reibungszahlen  $f$ . Der in Bild 12 angegebene Verlauf des Verhältnisses  $S/N$  über dem Schräglauftwinkel  $\beta$  bei einigen  $f$ -Werten entspricht



nach-

(21)

den-

(22).

ft S

T-

0kg

em

ter

 $\beta$ 

bei

n ab,

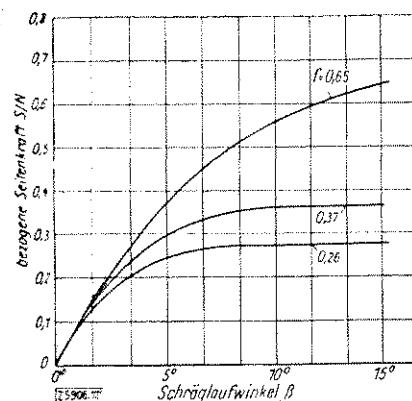
dor  
eito  
nnert  
e"),  
keit  
ien-  
maß  
reue-  
gen,  
den  
erto  
nen $(\beta)$   
für  
in  
ber  
cht

Bild 12. Abhängigkeit der bezogenen Seitenkraft  $S/N$  vom Schräglauwinkel  $\beta$  bei verschiedenen Reibungszahlen  $f$  nach Messungen von O. Dietz und R. Harling [9].

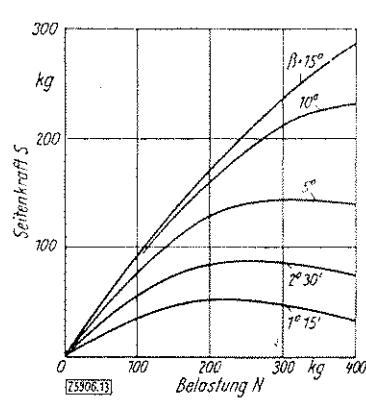


Bild 13. Für eine Reibungszahl  $f = 0.8$  errechneter Verlauf.

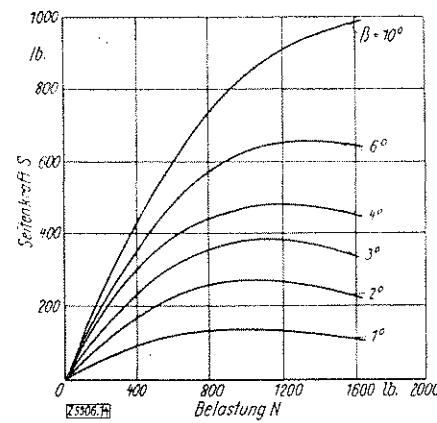


Bild 13 und 14. Abhängigkeit der Seitenkraft  $S$  von der Belastung  $N$  bei verschiedenen Schräglauwinkeln  $\beta$ .

den Messungen von O. Dietz und R. Harling [9]. In Bild 13 und 14 ist ferner die für einige  $\beta$ -Werte berechnete Abhängigkeit  $S = f(N)$  den Meßergebnissen von G. E. Lind Walker [10] gegenübergestellt worden. Diese Auftragung hat gegenüber der in Bild 10 den Vorteil, daß sich die Kurven nicht schneiden. Bild 15 enthält über der Belastung  $N$  den Verlauf von  $c_1$  nach Gl. (19). Für kleine Schräglauwinkel kann man nach  $S = k_1 \beta$  die Seitenkraft mittels eines Proportionalitätsfaktors  $k_1$  dem Winkel  $\beta$  verhältnismäßig setzen. Gemessene Werte für  $k_1$  sind in Bild 15 mit enthalten. Bild 16 zeigt schließlich den nach Gl. (21) definierten größten Schräglauwinkel in Abhängigkeit von der Belastung  $N$  und der Reibungszahl  $f$ . Bei Winkeln  $\beta > \beta_{\max}$  nimmt die Seitenkraft nicht weiter zu.

### Schräglaufmoment

Das Moment  $M_1$  um die Lenkachse kann beim Schräglauf des Luftreifens nicht null sein. Im allgemeinen liegt nämlich die Verformungsfläche ABC (vgl. Bild 8) nicht symmetrisch zur Lenkachse, und das statische Moment dieser Fläche bezüglich der Lenkachse ist ein Maß für das Schräglaufmoment (Lenkmoment)  $M_1$  des Luftreifens. Es gilt

$$M_1 = \int_0^s \frac{dx}{dx} \left( x - \frac{s}{2} \right) dx \quad \dots \quad (23).$$

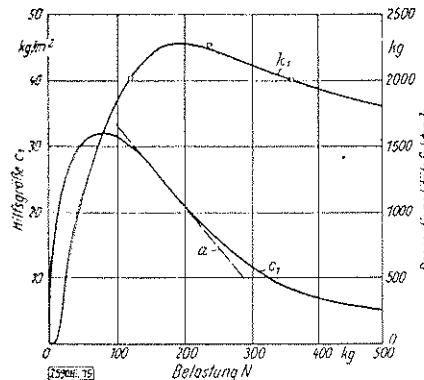


Bild 15. Verlauf der Hilfsgröße  $c_1$  und des Proportionalitätsfaktors  $k_1$  über der Belastung  $N$ .

Eingetragene Meßpunkte für  $k_1$  nach G. Becker, H. Fromm und H. Maruhn [6] a. Wendepunkt-Tangente

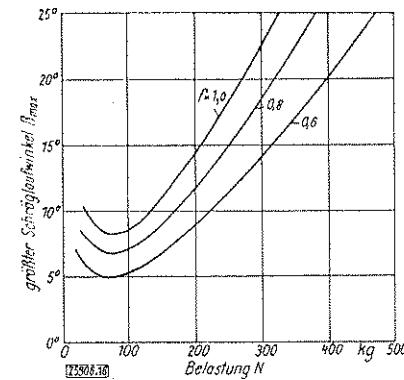


Bild 16. Verlauf des größten Schräglauwinkels  $\beta_{\max}$  über der Belastung  $N$  bei verschiedenen Reibungszahlen  $f$ .

Im Verwendungsbereich des Rades ist der Winkel  $\beta_{\max}$ , der den Beginn des Schleuderns kennzeichnet, annähernd der Belastung vorhängiggleich.

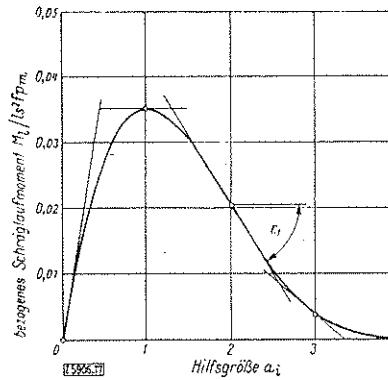


Bild 17. Verlauf des bezogenen Schräglaufmomentes  $M_1/l s^2/p_m$  über der Hilfsgröße  $a_1$  nach Gl. (25).

$\epsilon$ , Winkel der Tangente an die Kurve gegen die  $a_1$ -Achse





